4.4 Predstavljanje podataka i programa u računaru

4.4.1 Brojni sistemi

Još u stara vremena Rimljani i Grci su imali svoje brojne sisteme u kojima su računali. Međutim, ti brojni sistemi bili su vrlo složeni i nisu bili prikladni za izvođenje složenijih matematičkih operacija. Pretpostavlja se da su tek Hindusi u Indiji prvi otkrili da se neki proizvoljni skup različitih stvari može preslikati na jedan apstraktan ali uređen skup znakova. Ovaj referentni skup sastavljen je od deset različitih znakova koji se nazivaju cifre. Pri tome se cifre mogu dodavati jedna do druge i time dobivaju različite vrijednosti. Tako je nastao decimalni brojni sistem kojim se i danas služimo. Ovaj sistem brojanja i računanja stigao je preko Bliskog Istoka u Italiju, a kasnije se proširio i u cijeloj Evropi tokpm 11. i 12. vijeka.

Međutim, decimalni brojni sistem nije i jedini sistem u kome se mogu izraziti brojevi. Postoji čitav niz drugih brojnih sistema koji imaju neke zajedničke karakteristike.

4.4.2 Osnovne karakteristike brojnih sistema

Svaki brojni sistem definisan je slijedećim veličinama:

1. skupom cifara sa kojima se radi u datom brojnom sistemu i
2. bazom, koja je fiksna za jedan brojni sistem i koja govori koliko je puta veća slijedeća lijeva cifra u odnosu na prethodnu.

Svi savremeni brojni sistemi su pozicioni, tj. vrijednost pojedine cifre zavisi od njenog mjesta u broju. Primjeri u decimalnom brojnom sistemu:

u broju 175 cifra 7 govori o vrijednosti 70 zbog svog položaja, dok u broju 7234 cifra 7 ovaj put označava 7000, zbog svog novog položaja.

Baza decimalnog brojnog sistema je 10, a osnovni skup cifara je; 0, 1, 2, 3, ..., 8 i 9. Imajući ovo u vidu, pomoću navedenih cifara može se predstaviti svaki broj. Obično se taj broj piše u skraćenom obliku, imajući na umu da je decimalni brojni sistem pozicioni. Na primjer:

$$2856 = 2\cdot1000 + 8\cdot100 + 5\cdot10 + 6\cdot1 = 2\cdot10^3 + 8\cdot10^2 + 5\cdot10^1 + 6\cdot10^0$$

Ovdje cifre 2, 8, 5 i 6 predstavljaju koeficijente datog broja a_3, a_2, a_1 i a_0, dok su 10^3, 10^2, 10^1 i 10^0 baze odgovarajućeg stepena koji zavisi od pozicije cifre u broju. Prema tome, svaki decimalni broj N može da se napiše u obliku:

$$N = a_n\,10^n + a_{n-1}\,10^{n-1} + a_{n-2}\,10^{n-2} + \cdots + a_2\,10^2 + a_1\,10^1 + a_0\,10^0$$

gdje su a_i koeficijenti datog broja i nalaze se u garnicama od 0 do 9, i to samo kao cijeli brojevi, tj. $0 \le a_i \le 9$ za $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Znači da koeficijenti jednog broja predstavljaju jednu od dozvoljenih cifara datog brojnog sistema, u ovom slučaju decimalnog.

Prethodni broj se nikad ne piše u razvijenom obliku, nego se, zahvaljujući pozicionosti sistema, uvijek skrati i obično se pišu samo koeficijenti, a njihov položaj određuje stepen baze, pa se broj N zapisuje u obliku:

$$N = a_n\ a_{n-1}\ a_{n-2}\ \cdots\ a_2\ a_1\ a_0$$

Ovo je način predstavljanja samo pozitivnih i cijelih brojeva (isto i kod drugih brojnih sistema), mada se i ostale vrste brojeva mogu dati u ovom obliku.

U broju N koeficijent a_n nazivamo najznačajnijom cifrom, gdje je n stepen za datu poziciju i on zavisi od dužine broja, odnosno veličine koja je predstavljena tim brojem. Koeficijent a_0 je najmanje značajna cifra broja N (važi samo za cijele brojeve).

Ako u proširenom obliku pisanja decimalnog broja N zamijenimo bazu 10 nekom proizvoljnom bazom b, dobijemo broj zapisan u općem obliku:

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

Od ograničenja koja se postavljaju na koeficijente a_i (tj. dozvoljenog broja cifara) i vrijednosti b, zavisi i brojni sistem u kome je dati broj N zapisan. Pri tome, u svim brojnim sistemima baza sistema b uvijek je veća za jedan od najviše dozvoljene cifre u datom brojnom sistemu. Kod decimalnog brojnog sistema, gdje je najveća cifra 9, baza sistema je 10.

4.4.3 Binarni brojni sistem

Dvije cifre za predstavljanje svih brojeva su 0 i 1. Baza ovog sistema je 2 (veća za 1 od najveće cifre). Brojevi 0 i 1 pišu se isto kao u decimalnom brojnom sistemu:

0 0 0 0 0
0 0 0 1 1

a ostali se pišu u obliku:

$0\,0\,1\,0 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ 2
$0\,0\,1\,1 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ 3
$0\,1\,0\,0 = 1 \cdot 2^2$ 4
$0\,1\,0\,1 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0$ 5
$0\,1\,1\,0 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1$ 6
$0\,1\,1\,1 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ 7
$1\,0\,0\,0 = 1 \cdot 2^3$ 8
$1\,0\,0\,1 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0$ 9

Očito je da se na ovaj način postiže zapisivanje bilo kojeg broja u binarnom obliku. Na primjer, decimalni broj 69 zapisuje se u obliku:

$$1\,0\,0\,0\,1\,0\,1_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 69_{10}$$

dok se decimalni broj 5,25 u binarnom obliku zapisuje na slijedeći način:

$$101{,}01_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 4 + 0 + 1 + \frac{1}{4} = 5{,}25_{10}$$

Dakle, svaki binarni broj N može se zapisati u obliku:

$$N = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + a_{n-2} 2^{n-2} + \cdots + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0 = \sum_{i=0}^{n} a_i 2^i$$

gdje su $a_i = 0$ ili $a_i = 1$. U normalnom pisanju i ovdje se izostavljaju baze, pa se binarni broj piše u obliku niza nula i jedinica:

$$N = a_n\ a_{n-1}\ a_{n-2} \cdots a_2\ a_1\ a_0$$

Ovaj brojni sistem je naročito važan u računarskim naukama, jer cjelokupan računar radi na principima binarnih brojeva. Memorisanje podataka i njihova obrada vrši se u ovom obliku.

4.4.4 Prevođenje brojeva iz jednog brojnog sistema u drugi

Poznavanje binarnog brojnog suistema potrebno je samo za razumijevanje načela rada računara. Računari su konstruirani tako da korisnik radi isključivo s dekadnim brojevima, a računar samostalno pretvara ove vrijednosti u binarne, kako bi ih mogao spremiti i obrađivati.

Treba naglasiti da ne postoji nikakav matematički razlog koji bi činio jedan brojni sistem boljim od drugog. Nama se brojni sistem s bazom 10 čini najlogičnijim sistemom, zbog toga što smo na njega navikli.

Kad su u pitanju elektronski sklopovi koji barataju brojčanim vrijednostima, želimo li proizvesti ovakav sklop zasnovan na sistemu s bazon 10, morat ćemo za svaku znamenku podatka imati 10 različitih vrijednosti. Ovakav sklop bio bi mnogo skuplji, složeniji i s upitnom pouzdanošću u radu. Očito je da nam je potreban znatno jednostavniji sklop, koji se može dobiti ako smanjimo bazu brojnog sistema.